* ۳۹. ثابت کنید، دو نقطه ی دلخواه از سطح یک چهاروجهی منتظم با یال به طول واحد را می توان با خط شکسته ای که از طریق سطح چهاروجهی می گذرد، طوری به هم وصل کرد که طول آن از $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ تجاوز نکند.

* ۴۰. دو سوسک، روی محیط چندضلعی کوژ واقع اند. آن ها در یک لحظه، در روی محیط چندضلعی، با سرعت های یکسان آغاز به حرکت می کنند. موقعیت نخستین سوسک ها چگونه باشد که، کمترین فاصله ی ممکن بین آن ها، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

دور نهایی (برای سال های هشتم و نهم)

۴۱. در المپیاد سراسری اتحاد شوروی، دانش آموزان سال های هشتم و نهم و دهم شرکت کردند. در گروه دانش آموزان لنین گرادی، k نفر از کسانی که در المپیاد شهری موفق شده بودند و هم آن ها که در المپیاد سراسری سال پیش پیروزی به دست آورده بودند، شرکت داشتند. در این گروه، حداکثر چند نفر شرکت دارند؟

۴۲. ثابت کنید، برای هر x، y و z از بازه ی $[o,۱]$، همیشه داریم:

$$۳(x^۲y^۲+x^۲z^۲+y^۲z^۲)-۲xyz(x+y+z)\leq ۳$$

۴۳. از نقطه ای واقع در درون مثلث، عمودهایی بر ضلع های مثلث فرود آورده ایم. نقطه ی درونی را در کجا انتخاب کنیم، تا حاصل ضرب طول های این سه عمود، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

۴۴. کارت هایی را بین عده ای از مردم تقسیم کرده اند تا در آن ها، نویسنده، نقاش و آهنگ ساز مورد علاقه ی خود را نام ببرند. معلوم شد، هر یک از هنرمندان فعال در این رشته ها، درست مورد علاقه ی k نفر است. ثابت کنید، کارت های جمع آوری شده را می توان به $۳k-۲$ گروه، طوری تقسیم کرد که، در هر گروه، هر دو کارت، معرف ذوق های مختلف باشند.

۴۵. ثابت کنید، طول نیمسازی از مثلث که بر ضلع بزرگتر فرود می آید، از طول ارتفاعی که بر ضلع کوچکتر مثلث فرود آمده است، تجاوز نمی کند.

۴۶. راس های یک چندضلعی کوژ را، که تعداد ضلع های آن عددی فرد است، به سه رنگ مختلف طوری در آورده ایم که، هر دو رأس مجاور، رنگ های متفاوتی داشته باشند. ثابت کنید، چندضلعی را می توان به وسیله ی قطر های غیر متقاطع خود، طوری به صورت مثلث ها برید که، در هر مثلث، راس ها به سه رنگ مختلف باشند.

۴۷. حداکثر چند مکعب مستطیل $۴\times۱\times۱$ را می توان در مکعب $۶\times۶\times۶$ جا داد، به نحوی که وجه های آن ها با وجه های متناظر مکعب، موازی باشند؟

* ۴۸. O، مرکز تقارن چندضلعی کوژ F است. $A_۱$، و $A_۲$ و همچنین $B_۱$ و $B_۲$ را نقطه هایی از چندضلعی می گیریم که، نسبت به O، قرینه ی هم باشند. می دانیم اجتماع چندضلعی هایی که از F با انتقال موازی به اندازه ی بردار های $\overrightarrow{OA_۱}$ و $\overrightarrow{OA_۲}$ به دست می آیند، نقطه های $B_۱$ و $B_۲$ را نمی پوشاند. ثابت کنید، اجتماع چندضلعی هایی که از انتقال موازی F به اندازه ی بردار های $\overrightarrow{OA_۱}$، $\overrightarrow{OA_۲}$، $\overrightarrow{OB_۱}$ و $\overrightarrow{OB_۲}$ به دست می آیند، تمامی چندضلعی F را می پوشانند.

۱۹۸۱

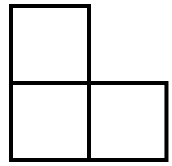
سال پنجم

۱. کولیا و واسیا، دانش آموزان سال پنجم، نمره های خود را با هم مقایسه کردند؛ معلوم شد، تعداد نمره های ۵ کولیا، برابر است با تعداد نمره های ۴ واسیا؛ تعداد نمره های ۴ کولیا با تعداد نمره های ۳ واسیا؛ تعداد نمره های ۳ کولیا با تعداد نمره های ۲ واسیا؛ و سرانجام، تعداد نمره های ۲ کولیا با تعداد نمره های ۵ واسیا یکی است. به جز این، معلوم شد، مجموع نمره های هر یک برابر ۵۴ و معدل دو نفر هم برابر است. ثابت کنید، آن ها در محاسبه اشتباه کرده اند.

۲. آیا می توان با رقم های ۱، ۲، ۳، ...، و ۹، یک عدد نه رقمی طوری ساخت که تعداد رقم های بین ۱ و ۲، تعداد رقم های بین ۲ و ۳، ...، تعداد رقم های بین ۸ و ۹، عددی فرد باشد؟

۳. A، B و C، سه نقطه اند که روی یک خط راست نیستند. در درون مثلث ABC، ۹ نقطه ی دیگر انتخاب کرده ایم. برخی از این ۱۲ نقطه را به وسیله ی پاره خط های راست طوری به هم وصل کنید که، این پاره خط های راست یکدیگر را قطع نکنند، مثلث ABC به مثلث های کوچکتری تقسیم شود و هر یک از ۱۲ نقطه، درست به پنج نقطه ی دیگر وصل شده باشد.

۴. روی صفحه ی کاغذ شطرنجی، مربع ۱۲×۱۲ را رسم کرده ایم. دست کم چند خانه ی آن را باید رنگ کرد تا نتوان در بخش رنگ نشده، سه خانه را شبیه شکل ۹، جدا کرد؟



شکل ۹

۵. آیا عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که عدد $n^{۲}$، از سمت چپ با رقم های ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ آغاز شود؟
۶. از سکه های ۱ کوپکی، ۲ کوپکی، ۵ کوپکی و ۱۰ کوپکی، ۴ روبل داریم. ثابت کنید، با این سکه ها می توان ۳ روبل جدا کرد. [هر روبل، ۱۰۰ کوپک است.]
سال ششم

۷. ثابت کنید، به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $\frac{۱۰^{n}-۱}{۸۱}-\frac{n}{۹}$، عددی درست است.
۸. نقطه ی C در درون زاویه ی قائمه XOY واقع است. نقطه ی A را روی نیم خط راست OX و نقطه ی B را روی نیم خط راست OY انتخاب کرده ایم. ثابت کنید، محیط مثلث ABC از دو برابر طول پاره خط راست OC بزرگتر است.
۹. همان مساله ی ۴
۱۰. همان مساله ی ۶.
۱۱. عدد طبیعی n چنان است که $n^{۲}+۱$، عددی ده رقمی شده است. ثابت کنید، در عدد $n^{۲}+۱$، به دو رقم برابر، برخورد می کنیم.
۱۲. عدد های درست را در رأس های مکعب نوشته ایم. می توانیم، هر بار، یک واحد به هر دو عددی که در دو سر یک یال قرار دارند، اضافه کنیم. آیا می توان با تکرار این عمل، به جایی رسید که همه ی عدد های واقع در رأس ها بر ۳ بخش پذیر باشند، به شرطی که در آغاز، در یکی از رأس ها، عدد ۱ و در بقیه ی رأس ها، عدد ۰ را گذاشته باشیم؟
سال هفتم
۱۳. آیا عددی طبیعی وجود دارد که، با حذف رقم اول سمت چپ آن، خارج قسمت حاصل از تقسیم عدد بر ۱۹۸۱ به دست آید؟
۱۴. همان مساله ی ۸.
۱۵. همان مساله ی ۴.
۱۶. m، عدد طبیعی دلخواهی است، بزرگتر از ۳. S، مجموع همه ی عدد های طبیعی x است، به شرطی که x از m تجاوز نکند و $x^{۲}-x+۱$ بر m بخش پذیر باشد. ثابت کنید، S، بر $m+۱$ بخش پذیر است (در حالتی که، چنین عدد های x وجود نداشته باشند، آن ها را بر صفر می گیریم).
۱۷. از نقطه ی M واقع در درون مثلث ABC، پاره خط های راست $P_{۱}P_{۲}$، $Q_{۱}Q_{۲}$، و $R_{۱}R_{۲}$ را، به ترتیب موازی با ضلع های BC، AC، و AB رسم کرده ایم، به نحوی که دو انتهای هر پاره خط راست روی دو ضلع مثلث باشد. ثابت کنید:

$$\frac{|P_{۱}P_{۲}|}{|BC|}+\frac{|Q_{۱}Q_{۲}|}{|AC|}+\frac{|R_{۱}R_{۲}|}{|AB|}=۲$$

۱۸. همان مساله ی ۱۲.
سال هشتم
۱۹. آیا ۱۹۸۱ عدد درست متوالی وجود دارد که مجموع آن ها، مکعب یک عدد طبیعی باشد؟
۲۰. مربع واحد را به مستطیل هایی با ضلع های موازی ضلع های مربع تقسیم کرده ایم. در هر مستطیل، نسبت طول ضلع کوچکتر به ضلع بزرگتر را به دست آورده ایم. ثابت کنید، مجموع این نسبت ها، کمتر از واحد نیست.
۲۱. ثابت کنید، اگر $x^{۲}+xy+xz<۰$، آن گاه $y^{۲}>۴xz$.
۲۲. روی ضلع AB از مثلث ABC، نقطه های $C_{۱}$ و $C_{۲}$، روی ضلع BC، نقطه های $A_{۱}$ و $A_{۲}$؛ روی ضلع CA، نقطه های $B_{۱}$ و $B_{۲}$ را طوری انتخاب کرده ایم که داشته باشیم:

$$|AC_۱| = |C_۱C_۲| = |C_۲B| = \frac{۱}{۳}|AB|,$$

$$|BA_۱| = |A_۱A_۲| = |A_۲C| = \frac{۱}{۳}|BC|,$$

$$|CB_۱| = |B_۱B_۲| = |B_۲A| = \frac{۱}{۳}|CA|$$

ثابت کنید، از برخورد مثلث های $A_۱B_۱C_۱$ و $A_۲B_۲C_۲$، شش مثلث برابر به دست می آید.

۲۳. راس های مثلث ABC، در نقطه های گرهی یک صفحه ی کاغذ شطرنجی نامتناهی، با خانه های به ضلع واحد، قرار دارد. ثابت کنید، اگر $|AB| > |AC|$، آن وقت $|AB| - |AC| > \frac{۱}{p}$ که، در آن، p، محیط مثلث ABC است.

* ۲۴. مهره ای در روی صفحه ی شطرنج، می تواند از طریق خانه های سیاه حرکت کند؛ در ضمن، با یک حرکت می تواند به هر یک از خانه های قطری مجاور برود. دست کم چند حرکت لازم است تا همه ی خانه های سیاه را بپیماید؟

سال نهم

۲۵. مجموع فاصله های هر نقطه ی درونی چهارضلعی کوژ تا خط های راست شامل ضلع ها، مقداری ثابت است. ثابت کنید، این چهارضلعی، متوازی الاضلاع است.

۲۶. همان مساله ی ۲۰.

۲۷. همان مساله ی ۲۴ برای جدول ۹×۹ (خانه ی چپ و پایین جدول، سیاه است.)

۲۸. دنباله ی $۱ < a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n < \cdots$، از عدد های طبیعی، چنان است که، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$a_{n+a_n} = ۲a_n$$

ثابت کنید، عدد طبیعی c وجود دارد، به نحوی که، برای هر عدد طبیعی n، داشته باشیم: $a_n = c + n$.

۲۹. عدد های درست a، b، c، d و A چنان اند که

$$a^۲ + A = b^۲, c^۲ + A = d^۲$$

ثابت کنید، عدد زیر، مجذور یک عدد طبیعی است.

$$۲(a+b)(c+d)(ac+bd-A)$$

۳۰. همان مساله ی ۲۳.

سال دهم

۳۱. در هر یک از دو شانزده ضلعی منتظم مساوی، هفت رأس را نشان گذاشته ایم. ثابت کنید، این دو چندضلعی را می توان طوری روی هم قرار داد که، دست کم چهار رأس نشان دار اولی بر چهار رأس نشان دار دومی منطبق شود.

۳۲. همان مساله ی ۲۳.

۳۳. همان مساله ی ۲۹.

۳۴. روی یال های جانبی $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$، از منظور مثلث القاعده ی $ABCA_۱B_۱C_۱$، نقطه های $A_۰$، $B_۰$ و $C_۰$ را طوری نشان گذاشته ایم که

$$|AA_۰| = a, |BB_۰| = b, |CC_۰| = c$$

M را نقطه ی برخورد صفحه های $A_۰BC$، $B_۰AC$ و $C_۰AB$ می گیریم و، از آن، پاره خط راست MP را موازی یال های جانبی منشور رسم می کنیم (P، روی صفحه ی قاعده ی ABC است). ثابت کنید، اگر $|MP| = d$، آن وقت

$$\frac{۱}{d} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}$$

۳۵. همان مساله ی ۲۴، برای صفحه ی شطرنجی ۱۰×۱۰.

* ۳۶. آیا توانی طبیعی از عدد ۵ وجود دارد که، در صد رقم سمت راست آن، دست کم ۳۰ رقم پشت سر هم، برابر صفر باشد؟

دور نهایی

۳۷. عدد طبیعی p را طوری پیدا کنید که

$$۲^{۲^{\cdot^{\cdot^{۲}}}} + ۹$$

عددی اولی باشد (در عدد بالا، p بار از عدد ۲ استفاده شده است).

۳۸. نقطه های $C_۱$، $B_۱$ و $A_۱$ را، به ترتیب، روی ضلع های AB، AC، و BC از مثلث متساوی الاضلاع ABC، که ضلعی به طول ۲ دارد، انتخاب کرده ایم. بیشترین مقدار مجموع شعاع های دایره های محاطی مثلث های $AB_۱C_۱$، $A_۱BC_۱$ و $A_۱B_۱C$ چقدر می تواند باشد؟

۳۹. توده ای شامل m مهره وجود دارد. دو نفر با هم بازی می کنند و، به نوبت، از این توده مهره بر می دارند. در ضمن، در k امین حرکت، می توان، به دلخواه، از ۱ تا k مهره برداشت. کسی بازی را می برد که آخرین مهره را بردارد. m چقدر باشد تا کسی که بازی را آغاز می کند بتواند برنامه ای برای برد حتمی خودش بریزد؟

۴۰. ثابت کنید، نمی توان مقدار های گویایی برای عدد های a، b، c و d پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:

$$(a+b\sqrt{۳})^۴+(c+d\sqrt{۳})^۴=۱+\sqrt{۳}$$

۴۱. ۱۶ خانه از مربع سفید ۸×۸ را به رنگ سیاه درآورده ایم؛ در ضمن، در هر سطر و در هر ستون، درست ۲ خانه سیاه شده است. ثابت کنید، با دوباره رنگ کردن سطر ها و ستون ها، نمی توان تعداد خانه های سیاه را کمتر کرد.

* ۴۲. آیا ۶ عدد شش رقمی با رقم های از ۱ تا ۶، بدون تکرار رقم ها، وجود دارد، به نحوی که بتوان، هر عدد سه رقمی دلخواه را که با رقم های از ۱ تا ۶، بدون تکرار رقم ها، از یکی از این ۶ عدد، با خط زدن ۳ رقم آن به دست آورد؟

۴۳. p عدد را در یک ردیف نوشته ایم، هر یک از این عدد ها برابر است با ۱+ یا ۱−. در هر حرکت، می توان علامت های چند عدد ردیف هم را عوض کرد. دست کم چند بار باید این حرکت را انجام داد تا، برای هر ردیفی که در آغاز انتخاب کرده ایم، به دنباله ای برسیم که تنها شامل واحد ها باشد؟

* ۴۴. آیا می توان پنج نقطه با فاصله های دو به دو مختلف، طوری در فضا پیدا کرد که محیط همه ی پنج ضلعی های فضایی با رأس هایی در این پنج نقطه، با هم برابر باشند؟

۴۵. عدد های a، b و c در بازه ی [۰,۱] واقع اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\sqrt{a(۱-b)(۱-c)}+\sqrt{b(۱-a)(۱-c)}+\sqrt{c(۱-a)(۱-b)}\le ۱+\sqrt{abc}$$

* ۴۶. $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_۷$؛ $b_۱$، $b_۲$، ...، $b_۷$؛ $c_۱$، $c_۲$، ...، $c_۷$ را، سه انتخاب از عدد های درست فرض می کنیم. ثابت کنید، می توان چند گروه سه تایی (a_i, b_i, c_i)، با اندیس های برابر، از این سه انتخاب، حذف کرد (و البته، نه همه ی آن ها را)، به نحوی که، مجموع عدد های باقی مانده در هر یک از سه انتخاب اصلی، بخش پذیر بر ۳ باشد.

۱۹۸۲

سال پنجم

۱. شماره ی شش رقمی تلفن شخصی داده شده است. چند شماره ی هفت رقمی تلفن وجود دارد که، با حذف یکی از رقم های آن، شماره ی شش رقمی تلفن این شخص به دست می آید؟

۲. حشره ای، ۱ سانتی متر می جهد؛ سپس ۳ سانتی متر در همان جهت و یا در جهت عکس؛ بعد، در همان جهت یا جهت عکس، ۵ سانتی متر می جهد و غیره. آیا ممکن است، بعد از ۲۵ پرش، به جای اول خود برگردد؟

۳. برخی از خانه های یک جدول ۵×۵ را به رنگ قرمز و بقیه را به رنگ آبی درآورده ایم. ثابت کنید، می توان چهار خانه از جدول را با یک رنگ پیدا کرد که در محل برخورد دو سطر و دو ستون باشند.

۴. ثابت کنید، اگر مجموع دو عدد طبیعی برابر ۷۷۰ باشد، حاصل ضرب آن ها بر ۷۷۰ بخش پذیر نیست.

۵. عدد های از ۱ تا ۱۲ را روی یال های مکعب طوری قرار دهید که، مجموع عدد های واقع بر هر وجه، برابر با مجموع عدد های واقع بر هر وجه دیگر باشد.

۶. دو نفر با هم بازی می کنند. چند مجموعه ی مهره وجود دارد. هر نفر باید، در نوبت خود، مجموعه ای دلخواه را که بیش از دو مهره دارد، به دو بخش کوچکتر تقسیم کند. بازی تا آن جا ادامه پیدا می کند که، هیچ مجموعه ای، بیش از یک مهره نداشته باشد. کسی برنده است که آخرین حرکت را انجام داده باشد. ثابت کنید، اگر در آغاز، یک مجموعه ی شامل ۱۰۰ مهره وجود داشته باشد، کسی که بازی را آغاز کند، می تواند برنده شود.

سال ششم

۷. a و b، دو عدد دو رقمی هستند که، رقم سمت راست آن ها، با هم برابر است. دو عدد را بر ۹ تقسیم کرده ایم: خارج قسمت حاصل از تقسیم a بر ۹ برابر باقی مانده ی حاصل از تقسیم b بر ۹؛ و خارج قسمت حاصل از تقسیم b بر ۹ برابر باقی مانده ی حاصل از تقسیم a بر ۹ شده است. همه ی این گونه عدد های a و b را پیدا کنید.

۸. همان مساله ی ۳.

۹. ثابت کنید، اگر مجموع دو عدد طبیعی برابر ۳۰۰۳۰ باشد، حاصل ضرب آن ها بر ۳۰۰۳۰ بخش پذیر نیست.

۱۰. دایره ای به شعاع واحد و ۱۹۸۲ نقطه، روی صفحه داده شده است. ثابت کنید، روی محیط این دایره، نقطه ای پیدا می شود که مجموع فاصله های از آن تا ۱۹۸۲ نقطه، از ۱۹۸۲ بیشتر باشد.

۱۱. حشره ی به اندازه ی ۱ سانتی متر می جهد، به اندازه ی ۹۰ درجه می چرخد و بعد به اندازه ی ۲ سانتی متر می جهد، باز هم به اندازه ی ۹۰ درجه می چرخد و به اندازه ی ۳ سانتی متر می جهد و غیره. آیا ممکن است، بعد از ۱۹۸۲ پرش، در جای اول خود باشد؟

۱۲. در یک مدرسه، هیچ دانش آموز پسری با همه ی دانش آموزان دختر، درس ریاضی را تمرین نکرده است، ولی هر دانش آموز دختر، دست کم با یک پسر، درس ریاضی را تمرین کرده است. ثابت کنید دو زوج M_1، D_1 و M_2، D_2 (M پسر و D دختر) پیدا می شود که M_1 با D_1 و M_2 با D_2 درس خوانده است، ولی M_1 با D_2 و M_2 با D_1 نبوده است.
سال هفتم
۱۳. درباره ی دو عدد a و b می دانیم:

$$\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1$$

ثابت کنید، از دو عدد a و b، یکی بزرگتر از واحد و دیگری کوچکتر از واحد است.
۱۴. ثابت کنید، برای هر چهار زاویه از یک چندضلعی کوژ، مجموع دو زاویه، از تفاضل دو زاویه ی دیگر، بزرگتر است.
۱۵. ثابت کنید، عدد ۲۲۲۰۰۲ (عددی ۱۹۸۲ رقمی با رقم های برابر ۲)، قابل تبدیل به صورت $xy(x+y)$ نیست (x و y، عدد هایی درست اند).
۱۶. دانش آموزان کلاس های ششم و هفتم، در یک مسابقه ی تنیس روی میز شرکت کردند؛ در ضمن، تعداد دانش آموزان کلاس ششم، دو برابر تعداد دانش آموزان کلاس هفتم بود. مسابقه در یک دور انجام گرفت. تعداد بازی های برندگان کلاس هفتم، ۴۰% بیشتر از تعداد بازی های برندگان کلاس ششم بود. چند دانش آموز در این مسابقه شرکت داشتند؟
۱۷. نه عدد طبیعی را، که از ۴۰ بزرگتر نباشند، در خانه های یک جدول 3×3 طوری قرار دهید که حاصلضرب عدد ها در هر سطر، در هر ستون و در هر یک از دو قطر، یکسان باشد.
۱۸. همان مساله ی ۱۲.
سال هشتم
۱۹. p_1، p_2، و p_3، سه جمله ای هایی درجه ی دوم، با ضریب مثبت برای بزرگترین درجه، هستند. ثابت کنید، اگر هر دوتا از آن ها، ریشه ی مشترک داشته باشند، آن وقت، سه جمله ای $p_1+p_2+p_3$، ریشه دارد.
۲۰. در مثلث ABC، زاویه ی C دو برابر زاویه ی A است و، در ضمن $|AC|=2|BC|$. ثابت کنید، این مثلث قائم الزاویه است.
۲۱. چهار جمله ی نخست یک دنباله عبارت است از

۱, ۹, ۸, ۲

از جمله ی چهارم به بعد، هر جمله برابر است با رقم سمت راستِ مجموعِ چهار جمله ی قبل از آن. آیا در این دنباله، به ردیف چهار جمله ی

۳, ۰, ۴, ۴

برخورد می کنیم؟
۲۲. هر زاویه ی بین دو قطر دلخواه یک ۱۸ ضلعی، بر حسب درجه، با عددی درست بیان می شود. ثابت کنید، با یک ۱۸ ضلعی منتظم سر و کار داریم.
۲۳. خانه های یک مستطیل 41×5 را، با دو رنگ مختلف، رنگ کرده ایم. ثابت کنید، می توان سه سطر و سه ستون طوری انتخاب کرد که، هر ۹ خانه ای که در تقاطع این سطر ها و ستون ها قرار دارند، از یک رنگ باشند.
۲۴. صفحه را به وسیله ی $2n$ خط راست $(n>1)$ به بخش هایی تقسیم کرده ایم؛ در ضمن، هیچ دو خط راستی با هم موازی نیستند و هیچ سه خط راستی از یک نقطه نمی گذرند. ثابت کنید، این بخش ها، با بیش از $2n-1$ زاویه به وجود نیامده اند.
سال نهم
۲۵. همان مساله ی ۲۰.
۲۶. همان مساله ی ۲۱.
۲۷. همان مساله ی ۲۲.
۲۸. می دانیم:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1$$

ثابت کنید، از این سه کسر، دو کسر برابر ۱ و یک کسر برابر ۱− است.
۲۹. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی k، عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\sqrt{n+1981^k}+\sqrt{n}=\left(\sqrt{1982}+1\right)^k$$

۳۰۰. چند مهره روی صفحه ریخته شده است؛ در ضمن، همه ی آن ها روی یک خط راست نیستند. می توانیم، هر مهره ی دلخواه را به جایی منتقل کنیم که قرینه ی آن نسبت به یک مهره ی دیگر باشد. ثابت کنید، با این عمل می توان مهره ها را به صورت رأس های یک چندضلعی کوژ درآورد.

سال دهم

۳۱. همان مساله ی ۲۱.

۳۲. همان مساله ی ۲۳.

۳۳. همان مساله ی ۲۸.

۳۴. در چهارضلعی ABCD، مجموع زاویه های BAC و BAD برابر است با ۱۸۰ درجه. AK، نیمساز زاویه ی CAD است. مقدار زاویه ی BAK را پیدا کنید.

۳۵. ثابت کنید می توان روی رأس های یک n ضلعی منتظم، عدد هایی مخالف صفر، طوری قرار داد که مجموع عدد های واقع در رأس های هر k ضلعی منتظم، که رأس های آن بر رأس های n ضلعی منطبق است ($k \le n$)، برابر صفر شود.

* ۳۶. $4n$ نقطه روی محیط دایره ای انتخاب و آن ها را، یک در میان، به رنگ های قرمز و آبی درآورده ایم. نقطه های هر رنگ را، به زوج هایی تقسیم و نقطه های هر زوج را با پاره خط های راستی از همان رنگ، به هم وصل کرده ایم (در ضمن، هیچ سه پاره خط راستی، در یک نقطه به هم نرسیده اند). ثابت کنید، دست کم، n نقطه ی برخورد پاره خط های راست قرمز با پاره خط های راست آبی پیدا می شود.

دور نهایی

۳۷. آیا عدد طبیعی k وجود دارد، به نحوی که از هر ۱۸۰ رأس دلخواه یک ۳۶۰ ضلعی منتظم به مرکز O، بتوان دو رأس A و B طوری انتخاب کرد که، مقدار زاویه ی AOB، برابر k درجه باشد؟

۳۸. مربع را به $۹۹^۲ = ۹۸۰۱$ مربع برابر تقسیم و مرکز های همه ی این مربع ها را، به جز یک مربع گوشه ای، نشان گذاشته ایم. نقطه هایی را که نشان گذاشته ایم، به زوج هایی تقسیم و نقطه های هر زوج را، با برداری به هم پیوسته ایم. ثابت کنید، مجموع این بردار ها، بردار صفر نمی شود.

۳۹. ۱۰ نقطه روی محیط دایره انتخاب کرده ایم. حداکثر، چند پاره خط راست، که دو انتهای هر یک از آن ها در این نقطه ها باشند، می توان رسم کرد، به نحوی که هیچ سه پاره خط راستی، تشکیل یک مثلث، به رأس هایی در این نقطه ها، ندهند؟

۴۰. پتیا، ۸ پیراشکی از دو نوع سیب زمینی و گوشتی خرید و، برای آن ها، یک روبل پرداخت. واسیا، ۹ پیراشکی خرید و یک روبل و یک کوپک پرداخت. هر پیراشکی گوشتی چند می ارزد، به شرطی که بدانیم، پیراشکی گوشتی گران تر است و، در ضمن، هر پیراشکی قیمتی بیش از یک کوپک دارد؟ هر روبل، برابر ۱۰۰ کوپک است.

۴۱. دایره ای در مثلث ABC محاط نقطه های D و E، نقطه های تماس این دایره، با ضلع های BC و AC است. بر نیمساز زاویه ی BAC، عمود BK را رسم کرده ایم. اگر K، پای این عمود باشد، ثابت کنید، سه نقطه ی D، E و K، روی یک خط راست اند.

۴۲. (A_n)، دنباله ای بی پایان از عدد های طبیعی است و می دانیم $A_{n+k} - A_k$، به ازای عدد های طبیعی و دلخواه n و k، بر A_n بخش پذیر است. حاصل ضرب $A_1 A_2 \cdots A_n$ را B_n می نامیم. ثابت کنید، B_{n+k} به ازای هر n و k، بر $B_n B_k$ بخش پذیر است.

* ۴۳. n نقطه روی یک صفحه اند، به نحوی که، هیچ سه نقطه ای روی یک خط راست و هیچ چهار نقطه ای روی محیط یک دایره نیستند. ثابت کنید، حداکثر $n-2$ دایره پیدا می شود که، هر کدام از آن ها، از سه نقطه (از نقطه های مفروض) می گذرد و همه ی نقطه های دیگر، در درون آن قرار می گیرند.

* ۴۴. ثابت کنید، مجموعه ی همه ی عدد های طبیعی را نمی توان به دو مجموعه چنان تقسیم کرد که، اگر عدد های a و b متعلق به یکی از این دو مجموعه باشد، عدد $ab-1$ هم متعلق به همان مجموعه باشد.

۱۹۸۳

سال پنجم

۱. ۳۰ نفر در مسابقه ی شطرنج شرکت کردند. ردیف امتیاز های کسانی را به حساب آوردند که، دست کم ۶۰% امتیاز های ممکن را به دست آورده باشند. حداکثر، چند نفر ممکن است وارد ردیف بندی شده باشند؟

۲) ۱۰ مقوای مستطیل شکل ۲۰×۱۰ سانتی متری را به ۲۰ تکه ی مثلثی شکل بریده ایم. با این تکه ها، چگونه می توان یک مربع ساخت؟

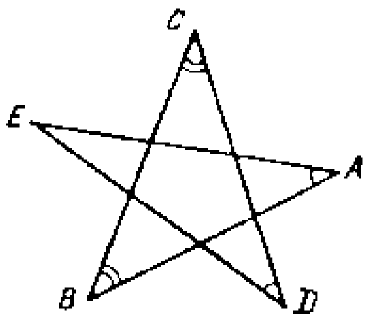
۳. هر یک از چهار نفر به نیا، وه نیا، سه نیا، و ژه نیا، یا همیشه راست می گوید و یا همیشه دروغ. این سخنان را شنیده ایم:

به نیا (به وه نیا): تو دروغ گویی.

ژه نیا (به نیا): تو هم دروغ گویی.

سه نیا (به ژه نیا): بله، هر دوی آن ها دروغگو اند. (و بعد از اندکی فکر) در ضمن، تو هم دروغگویی.

از این چهار نفر، کدام راستگو و کدام دروغگو هستند؟
۴. از کیسه ای که شامل برگ های کوچک کاغذی سیاه و سفید است، هشت برگ بیرون آورده ایم و آن ها را روی محیط دایره ای چیده ایم. هر بار، سه برگ ردیف هم را برداشته و به جای آن ها، برگ هایی با رنگ مخالف هر یک از آن ها گذاشته ایم. ثابت کنید، با تکرار این عمل، می توان به حالتی رسید که همه ی برگ ها سفید باشند.
۵. ماشین زمان امکان می دهد از اول مارس به اول نوامبر هر سال دیگر یا از اول آوریل به اول دسامبر، از اول مه به اول ژانویه و غیره منتقل شویم. دو بار پیاپی نمی توان از ماشین زمان استفاده کرد. بارون مون هاوزن، در اول آوریل با ماشین زمان به مسافرت رفت و بعد از لحظه ای برگشت. او ادعا کرد ۲۶ ماه در مسافرت بوده است. به بارون ثابت کنید که درست نمی گوید.
۶. با چهار رقم مختلف، دو عدد چهار رقمی ساخته ایم که، یکی از آن ها، بزرگترین عدد از بین عدد های چهار رقمی است که با رقم های مفروض می توان ساخت و، دیگری، کوچکترین عدد چهار رقمی در بین آن ها است؛ در ضمن، در این دو عدد چهار رقمی، رقم تکراری وجود ندارد. مجموع این دو عدد، برابر است با ۱۰۴۷۷ . این چهار رقم را پیدا کنید.
سال ششم
۷. عدد زوج a دارای این ویژگی است که، اگر a بر عدد اول p بخش پذیر باشد، آن وقت $a-1$ بر $p-1$ بخش پذیر است. ثابت کنید a، توانی از ۲ است.
۸. میله ای به طول ۲ متر را به پنج بخش (که لازم نیست با هم برابر باشند) تقسیم کرده ایم. طول هر بخش از ۱۷ سانتی متر کمتر نیست. ثابت کنید، از بین این پنج تکه، می توان سه میله انتخاب کرد که، با آن ها، بتوان یک مثلث ساخت.
۹. در پنج ضلعی ستاره ای که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، دو زاویه ی A و D با هم و دو زاویه ی B و C با هم برابرند؛ همچنین، دو پاره خط راست AB و CD، طول هایی برابر دارند. ثابت کنید، پاره خط های راست AE و DE هم، طولی برابر دارند.



شکل ۱۰

۱۰. هشت عدد، که هر یک برابر ۱+ یا ۱− است، روی محیط دایره ای نوشته ایم. با هر حرکت می توان علامت سه عددی را که در ردیف هم قرار دارند عوض کرد. ثابت کنید، با تکرار این حرکت، می توان از ردیفی از دو عدد ۱+ و ۱−، به هر ردیف دیگری رسید.
۱۱. همان مساله ی ۵.
۱۲. راس های مثلثی، به رنگ آبی اند. آیا می توان ۱۰ نقطه ی آبی و ۲۰ نقطه ی قرمز در درون مثلث طوری قرار داد که، هیچ سه نقطه ی آبی، روی یک خط راست نباشند و، در ضمن، در درون هر مثلث با رأس های آبی، دست کم یک نقطه ی قرمز قرار گرفته باشد؟
سال هفتم
۱۳. همان مساله ی ۹.
۱۴. هر خانه از مربع شطرنجی ۱۰۰ × ۱۰۰ را، به رنگ سیاه یا سفید درآورده ایم؛ در ضمن، تعداد خانه های سیاه، با تعداد خانه های سفید برابر است. ثابت کنید، این مربع را می توان، با برش روی خط های راست شبکه، به دو چندضلعی طوری تقسیم کرد که، در هر کدام از آن ها، تعداد خانه های سیاه با تعداد خانه های سفید برابر باشد.
۱۵. میله ای به طول ۲ متر را به پنج بخش تقسیم کرده ایم که؛ در ضمن، هیچ بخشی از ۱۹ سانتی متر کمتر نیست. ثابت کنید، با هر چهار بخش دلخواه از این پنج بخش، می توان یک چهار ضلعی ساخت.
۱۶. همان مساله ی ۱۲.
۱۷. ثابت کنید، عدد $2^{58}+1$ را می توان به صورت ضرب سه عدد طبیعی بزرگتر از واحد، تبدیل کرد.
۱۸. در هر خانه از جدول ۲۴×۲۴ف یکی از دو عدد ۱+ یا ۱− را نوشته ایم. در هر حرکت، می توان علامت یکی از عدد ها را، همراه با علامت های ستونی که این خانه در آن است یا سطر مربوط به این خانه، عوض کرد. ثابت کنید، با تکرار محدود این حرکت، می توان از هر وضع نخستین عدد های جدول، به هر وضع دیگری رسید.
سال هشتم

۱۹. عدد a از جا به جایی رقم های عدد b به دست آمده است. ثابت کنید، مجموع رقم های عدد $5a$ با مجموع رقم های عدد $5b$ برابر است.
۲۰. دو شطرنج باز، ۲۴ دور متوالی با هم بازی کردند. می دانیم در هیچ کدام از ردیف های فرد بازی، بازی به صورت مساوی تمام نشده است؛ در ضمن هیچ کدام از دو بازی کن، در سه دور متوالی نبرده است. حداکثر امتیاز برنده ی مسابقه، چقدر می تواند باشد؟
۲۱. نقطه ای را که در درون یک شش ضلعی منتظم قرار دارد، به وسیله ی پاره خط های راست، به رأس ها وصل کرده ایم. ثابت کنید، با این پاره خط های راست، می توان یک شش ضلعی ساخت که، مساحت آن، از $\frac{2}{3}$ مساحت شش ضلعی نخستین، کمتر نباشد.
۲۲. خط راست p، با میانه ی CM از مثلث ABC موازی است. خط های راست AB، BC و AC، خط راست p را، به ترتیب، در C_1، A_1 و B_1 قطع کرده اند. ثابت کنید، مساحت مثلث AA_1C_1 با مساحت مثلث BB_1C_1 برابر است.
۲۳. ۴۰۰ ضلعی منتظم را به صورت متوازی الاضلاع هایی بریده ایم. ثابت کنید، در بین این متوازی الاضلاع ها، دست کم ۱۰۰ مستطیل وجود دارد.
* ۲۴. چند نقطه، روی محیط دایره اند. آن ها با سرعت های ثابت و، از نظر مقدار برابر، آغاز به حرکت کردند (برخی در جهت حرکت عقربه های ساعت و برخی دیگر در خلاف این جهت). وقتی دو نقطه به هم بر می خورند، بلافاصله و هر دو، جهت حرکت خود را عوض می کنند؛ در ضمن روی محیط دایره باقی می مانند و سرعت خود را، از لحاظ مقدار، حفظ می کنند. ثابت کنید، لحظه ای فرا می رسد که، هر نقطه، در جای نخستینِ خود قرار می گیرد.

سال نهم

۲۵. ارتفاع های AH و CP را در مثلث ABC رسم کرده ایم. مقدار زاویه ی B را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم: $|AC| = 2|PH|$.
۲۶. اگر هر دو مختص نقطه ای در دستگاه محور های مختصات، عدد های درستی باشند، آن وقت، نقطه را «درست» می نامیم. نقطه ی درست را «اول» می نامیم، وقتی هر دو مختص آن، عدد هایی اول باشند. مربعی را، که رأس های آن نقطه هایی درست باشند، «اول» می نامیم، وقتی که هر نقطه ی درست واقع بر محیط آن، اول باشد. همه ی «مربع های اول» را پیدا کنید.
۲۷. چند کودک، به صورت دایره ای ایستاده اند و، هر کدام از آن ها، چند شکلات در دست خود دارند.. با سوت داور، هر نفر، نصف شکلات های خود را به نفر دست راستی خود می دهد (اگر تعداد شکلات های کسی فرد باشد، داور، پیش از آغاز بازی، یک شکلات به او می دهد). بازی چند بار تکرار می شود. ثابت کنید، زمانی فرا می رسد که، تعداد شکلات ها، به طور مساوی بین کودکان تقسیم شده است.
۲۸. به ازای کدام عددهای طبیعی $n \geq 2$، نابرابری

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq x_n \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}\right)$$

برای همه ی مقدار های متغیر های x_i برقرار است؟
۲۹. دایره های K_1 و K_2، دارای نقطه های مشترک درونی نیستند. خط های راست ℓ_1 و ℓ_2 بر این دو دایره، از بیرون مماس اند و چهار نقطه ی تماس، راس های یک چهار ضلعی محیطی اند. ثابت کنید، دایره های K_1 و K_2، بر هم از بیرون مماس اند.
۳۰. همان مساله ی ۲۴.

سال دهم

۳۱. دنباله ی (x_n) و (y_n) طوری ساخته شده اند که

$$x_1 = x_2 = 10, y_1 = y_2 = -10,$$
$$x_{n+2} = (x_n + 1)x_{n+1} + 1, y_{n+2} = (y_{n+1} + 1)y_n + 1$$

ثابت کنید، هر عدد طبیعی، حداکثر در یکی از این دنباله ها وجود دارد.
۳۲. همان مساله ی ۲۷.
۳۳. همان مساله ی ۲۸.
۳۴. یک کُنج سه وجهی مفروض است. می دانیم، نیمساز های دو زاویه ی مسطحه ی آن، بر هم عمودند. ثابت کنید، صفحه ای که از این دو نیمساز می گذرد، بر وجه سوم کنج عمود است.
۳۵. در یک هرم منتظم با قاعده ی ۲۰ ضلعی، مرکز های دو کره ی محاطی و محیطی هرم، بر هم منطبق اند. مقدار زاویه های دو وجهیِ وجه های جانبی هرم را (برحسب درجه) پیدا کنید.
۳۶. همان مساله ی ۲۴.

دور نهایی

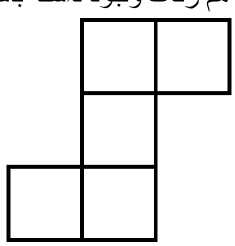
۳۷. ۹ راس یک ۲۰ ضلعی منتظم را علامت گذاشته ایم. ثابت کنید، مثلث متساوی الساقینی می توان پیدا کرد که، راس های آن، در نقطه های نشان دار باشد.
۳۸. مثلث ABC و نقطه ای در صفحه ی مثلث داده شده است. قرینه ی مثلث را نسبت به این نقطه به دست آورده ایم. از برخورد مثلث قرینه با مثلث ABC، یک چندضلعی به دست آمده است. ثابت کنید، مساحت این چندضلعی، از $\frac{2}{3}$ مساحت مثلث ABC تجاوز نمی کند.
۳۹. دو نفر روی یک صفحه ی کاغذ شطرنجی بی پایان، به نوبت، با نقطه گذاری در خانه های جدول، یک صلیب رسم می کنند. اولی می کوشد، به کمک چهار صلیبی که رسم شده است مربعی بسازد که ضلع های آن، با ضلع های خانه های جدول موازی باشد و دومی می کوشد مانع او شود. آیا اولی می تواند، با برنامه ریزی درست، برنده شود؟
۴۰. زاویه ی راس، در مثلث متساوی الساقین ABC، برابر ۱۰۰ درجه است. روی نیم خط راست AB، پاره خط راست AM را برابر قاعده ی BC جدا کرده ایم. اندازه ی زاویه ی BCM را پیدا کنید.
۴۱. به ازای کدام عدد طبیعی n، می توان n عدد a_1، a_2، ...، a_n را روی محیط دایره طوری قرار داد (همه ی عدد ها، با هم، برابر صفر نیستند)، به نحوی که، برای هر $k \le n$، مجموع k عدد ردیف، با آغاز از a_k، برابر صفر شود؟
۴۲. صفحه ی شطرنجی بی پایان را، به وسیله ی لایه ای از تکه مقوا هایی با اندازه ی 1×2 پوشانده ایم، به نحوی که ضلع های هر تکه مقوا، در امتداد خط های شبکه باشد. ثابت کنید، صفحه را می توان با سه لایه ی دیگر از همان گونه مقوا ها پوشاند، طوری که هیچ کدام از تکه مقوا ها، درست روی تکه مقوای مشابه خود قرار نگیرد.
* ۴۳. دنباله ی صعودی (a_n) از عدد های طبیعی چنان است که، اگر یک عدد طبیعی عضو این دنباله نباشد، می توان آن را به صورت $a_k + 2k$ نشان داد (k، یک عدد طبیعی است). ثابت کنید، برای هر k، نابرابری $a_k < \sqrt{2}k$ برقرار است.
۴۴. کشوری دارای n^2 شهر است که به صورت مربع قرار گرفته اند و، در ضمن، فاصله بین هر دو شهر مجاور، برابر ۱۰ کیلومتر است. شهر ها به وسیله ی جاده ها به هم مربوط اند؛ جاده ها خط های راستی را تشکیل می دهند که با ضلع مربع موازی اند. کمترین مقدار طول این دستگاه جاده ها چقدر است، به شرطی که از هر شهر این کشور، بتوانیم به هر شهر دیگری، از طریق جاده ها برویم؟

۱۹۸۴

سال پنجم
۱. ثابت کنید، در عدد صد رقمی

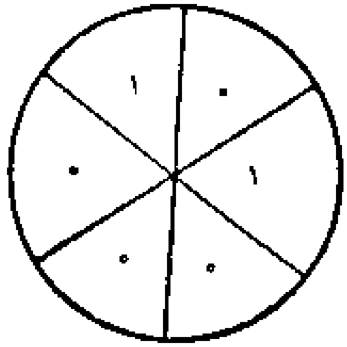
۸۴۱۹۸۴۱۹...۸۴۱۹

می توان، چند رقم از آغاز عدد و چند رقم از پایان عدد حذف کرد، به نحوی که مجموع رقم های باقی مانده، برابر ۱۹۸۴ باشد.
۲. در خانه های یک جدول 4×4، عدد هایی قرار دهید که، مجموع عدد های واقع در چهار گوشه ی هر مربع 2×2، 3×3 و 4×4، برابر صفر شود. هیچ کدام از عدد های درون خانه ها، برابر صفر نیست.
۳. روی خط راست، ۴۵ نقطه را، در بیرون پاره خط راست AB نشان گذاشته ایم. ثابت کنید، مجموع فاصله های این نقطه ها تا نقطه ی A، برابر با مجموع فاصله های این نقطه ها تا نقطه ی B نیست.
۴. خانه های صفحه ی شطرنجی دفترچه را، با هشت رنگ مختلف، رنگ کرده ایم. ثابت کنید، می توان شکلی شبیه شکل ۱۱، در آن پیدا کرد که، در درون آن، دو خانه ی هم رنگ وجود داشته باشد.



شکل ۱۱

۵. دایره را به شش قطاع تقسیم کرده و، طبق شکل ۱۲، در هر قطاع عددی برابر ۰ یا ۱ گذاشته ایم. می توانیم، در هر حرکت، به دو عدد مجاور، یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید، با تکرار این حرکت، نمی توان به حالتی رسید که، هر شش عدد، با هم برابر باشند.



شکل ۱۲

۶. عدد های ۱ تا ۱۰۰ ، به ردیف (و با اندکی فاصله بین هر دو عدد) و در یک سطر نوشته شده اند. دو نفر، به نوبت، هر کدام یکی از علامت های +، - یا × را بین دو عدد قرار می دهد. ثابت کنید، آن که بازی را آغاز کرده است، می تواند روشی در پیش گیرد که، سرانجام، عددی زوج به دست آید. (هر بازی کن، در نوبت خود باید یکی از جا های باقی مانده بین دو عدد متوالی را، با یکی از علامت ها، پر کند.)

سال ششم

۷. همان مساله ی ۳.

۸. قطر های AC و BD در چهارضلعی ABCD، یکدیگر را در O قطع کرده اند. محیط های دو مثلث ABC و ABD برابرند. همچنین دو مثلث ACD و BCD هم، محیط هایی برابر دارند. ثابت کنید: $|AO|=|BO|$.

۹. الف) همان مساله ی ۲.

ب) ثابت کنید، برای هر جدولی از این گونه، مجموع عدد های هر ستون، برابر صفر است.

۱۰. ۱۷۵ مداد گران تر از ۱۲۵ خودکار و ارزانتر از ۱۲۶ خودکار است. ثابت کنید، برای خرید سه مداد و یک خودکار، ۱۰۰ تومان کافی نیست.

۱۱. همان مساله ی ۶.

۱۲. از یک صفحه ی کاغذ شطرنجی ۲۹×۲۹، به تعداد ۹۹ مربع جدا کرده ایم که هر کدام از آن ها، شامل چهار خانه است. ثابت کنید، هنوز می توان یک مربع دیگر ۲×۲ از آن جدا کرد.

سال هفتم

۱۳. آیا پاره خط های راست به طول های ۲، ۳، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۰ ، ۱۱، ۱۳ و ۱۵، می توانند ضلع ها و قطر های یک پنج ضلعی کوژ باشند؟

۱۴. مطلوب است مقدار عددی عبارت

$$\frac{۱}{x^{۲}+۱}+\frac{۱}{y^{۲}+۱}+\frac{۲}{xy+۱}$$

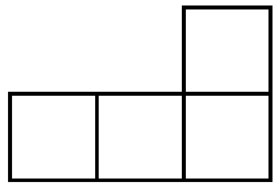
به شرطی که بدانیم، مجموع دو کسر اول این عبارت برابر است با ۳؛ در ضمن، x و y؛ با هم برابر نیستند.

۱۵. روی ضلع های AB و AC در مثلث ABC، مثلث های متساوی الساقین ADB ($|AD|=|AB|$) و ACE ($|AC|=|AE|$) را رسم کرده ایم. در ضمن، زاویه ی DAE برابر است با مجموع دو زاویه ی ABC و ACB. ثابت کنید، پاره خط راست DE، طولی دو برابر طول میانه ی AM از مثلث ABC دارد.

۱۶. روی خط راستی، ۴۵ نقطه را در بیرون پاره خط راست AB انتخاب کرده ایم. برخی از این نقطه ها را به رنگ قرمز، و بقیه را به رنگ آبی در آورده ایم. دو مجموع را محاسبه کرده ایم: ۱) مجموع فاصله های از نقطه های قرمز تا نقطه ی A را با مجموع فاصله های نقطه های آبی تا نقطه ی B، با هم جمع کرده ایم؛ ۲) مجموع فاصله های از نقطه های قرمز تا نقطه ی B را با مجموع فاصله های از نقطه های آبی تا نقطه ی A، با هم جمع کرده ایم. ثابت کنید، این دو مجموع، با هم برابر نیستند.

۱۷. مساله ی ۱۲ را، برای صفحه ی کاغذ شطرنجی ۳۱×۳۱ حل کنید.

۱۸. دست کم چند رنگ لازم است تا صفحه ی شطرنجی بی پایان را بتوان طوری رنگ کرد که، در آن، هر چهار خانه ی دلخواهی که شبیه شکل ۱۳ انتخاب شود، با چهار رنگ مختلف باشد؟



شکل ۱۳

سال هشتم

۱۹. مربع ۱۰۰×۱۰۰ را با قطعه های مستطیلی ۲×۱ ساخته ایم. ثابت کنید، زوج هایی از این قطعه ها، مربع ۲×۲ می سازند.

۲۰. تفاوت دو عدد شش رقمی

$$\overline{abcdef} \text{ و } \overline{fdebca}$$

بر ۲۷۱ بخش پذیر است. ثابت کنید $b=d$ و $c=e$.

۲۱. عدد های حقیقی $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{۱۰۱}$ چنان اند که

$$x_۱^۳+x_۲=x_۲^۳+x_۳=\cdots=x_{۱۰۰}^۳+x_{۱۰۱}=x_{۱۰۱}^۳+x_۱$$

ثابت کنید، همه ی این عدد ها، با هم برابرند.

۲۲. ثابت کنید، مجموع فاصله های از یک نقطه ی واقع بر صفحه ی یک ذوزنقه ی متساوی الساقین تا سه راس این ذوزنقه، بزرگتر است از فاصله ی همین نقطه تا راس چهارم ذوزنقه.

۲۳. BM میانه ی مثلث ABC و K، نقطه ای واقع بر پاره خط راست BM است. می دانیم زاویه های BAK و BCK با هم برابرند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی الساقین است.

۲۴. مجموعه ی A از عدد های طبیعی تشکیل شده است؛ در ضمن، بین هر صد عدد طبیعی متوالی، عضوی از مجموعه ی A وجود دارد. ثابت کنید، می توان چهار عضو مجموعه ی A، مثل a، b، c و d را پیدا کرد، به نحوی که $a+b=c+d$.

سال نهم

۲۵. همان مساله ی ۲۱.

۲۶. همان مساله ی ۲۲.

۲۷. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که به سه طریق بتوان آن را به صورت $۱۳x+۷۳y$ نشان داد (x و y، عدد هایی طبیعی اند)

۲۸. پاره خط های راست $AA_۱$، $BB_۱$، و $CC_۱$، ارتفاع های مثلث ABC هستند. اگر مثلث $A_۱B_۱C_۱$ با مثلث ABC متشابه باشد، زاویه های مثلث ABC را پیدا کنید.

۲۹. همان مساله ی ۲۴.

۳۰. مجموع سه عدد x، y و z برابر صفر است. ثابت کنید، عدد $۲(x^۴+y^۴+z^۴)$، مجذور یک عدد درست است.

سال دهم

۳۱. همان مساله ی ۲۲، برای هر نقطه ی دلخواه فضا.

۳۲. همان مساله ی ۲۴.

۳۳. ثابت کنید، تفاضل مجذور های طول های ضلع های مجاور متوازی الاضلاع، از حاصلضرب طول های دو قطر آن کمتر است.

۳۴. بعد از چند بار عمل مشتق گیری و عمل ضرب در $۱+x$، که روی چندجمله ای $x^۸+x^۷$ انجام شده است، به دو جمله ای $ax+b$ رسیده ایم. ثابت کنید، تفاضل دو عدد درست a و b، بر ۴۹ بخش پذیر است.

۳۵. حداکثر مقدار مجموع

$$|x_۱-۱|+|x_۲-۲|+\cdots+|x_{۶۳}-۶۳|$$

چقدر است، به شرطی که $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{۶۳}$، ترتیبی از عدد های ۱، ۲، ۳، ...، ۶۳ باشند؟

۳۶. عدد های از ۱ تا ۱۰۰ را در رأس های منشوری با قاعده های ۵۰ ضلعی گذاشته ایم. ثابت کنید، می توان یالی از منشور را پیدا کرد، به نحوی که اختلاف عدد های دو انتهای آن، از ۴۸ تجاوز نکند.

دور نهایی (سال های هشتم و نهم)

۳۷. نقطه های E و H روی ضلع های AB و CD از چهارضلعی کوژ ABCD انتخاب کرده ایم. می دانیم دو مثلث ABH و CDE مساحت هایی برابر دارند و در ضمن

$$|AE|:|BE|=|DH|:|CH|$$

ثابت کنید دو خط راست BC و AD موازی اند.
۳۸. دو نفر با هم بازی می کنند. نفر اول یک رقم می نویسد، نفر دوم، در سمت چپ یا سمت راست این رقم، رقمی می نویسد؛ بعد نفر اول دوباره در سمت چپ یا سمت راست عددی که پدید آمده است، یک رقم می نویسد و غیره. ثابت کنید، نفر اول می تواند طوری بازی کند که همیشه، بعد از حرکت نفر دوم، عدد حاصل مجذور کامل یک عدد درست نباشد.
۳۹. روی صفحه ی محور های مختصات، چهار نقطه با مختصات درست داده شده است. اجازه داریم، به جای هر نقطه (از این چهار نقطه)، قرینه ی آن را نسبت به یکی دیگر از چهار نقطه انتخاب کنیم. آیا می توان، بعد از چند عمل از این گونه، از نقطه های

$$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$$

به نقطه های زیر رسید:

$$(0,0),(1,1),(3,0),(2,-1)\ ؟$$

۴۰. ده عدد، یکی برابر ۱ و بقیه برابر ۰ داده شده است. در هر حرکت، دو عدد را بر می داریم و، به جای هر دو ی آن ها، میانگین حسابی آن ها را قرار می دهیم. بعد از یک رشته حرکت از این گونه، کوچکترین عددی که می تواند به جای عدد ۱ نشسته باشد، چه عددی است؟
۴۱. عدد های مثبت a_1، a_2، ...، a_k و b_1، b_2، ...، b_n چنان اند که داریم:

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

ثابت کنید، در خانه های جدول $k\times n$، می توان عدد های غیر منفی را طوری قرار داد که، در بین آن ها، دست کم به تعداد $(k-1)(n-1)$ عدد صفر وجود داشته باشد و، در ضمن، مجموع عدد ها در سطر ها برابر a_1، a_2، ...، a_k و مجموع عدد ها در ستون ها برابر b_1، b_2، ....، b_n باشد.
۴۲. مهره را در یکی از ۱۶۹ نقطه ی با مختصات (x,y) گذاشته ایم که، در آن $0\le x\le 12$ و $0\le y\le 12$. مهره می تواند از نقطه ی (x_1,y_1) به نقطه ی (x_2,y_2) برود، به شرطی که هر یک از عدد های $|x_1-x_2|$، $|x_1-y_2|$، $|y_1-x_2|$ و $|y_1-y_2|$ از ۲ کمتر و از ۹ بیشتر نباشد. ثابت کنید، نمی توان مهره را از هر ۱۶۹ نقطه گذراند، به نحوی که در هر نقطه، تنها یک بار باشد.
۴۳. دایره ای بر ضلع های زاویه ای به رأس O مماس است. قطری از دایره را در نظر می گیریم که از نقطه ی تماس دایره با یکی از ضلع ها نگذشته باشد و دو انتهای آن را A و B می نامیم. مماس بر دایره در نقطه ی B، ضلع های زاویه را در نقطه ها ی C و D و خط راست OA را در نقطه ی E قطع کرده است. ثابت کنید: $|BC|=|DE|$.
* ۴۴. ثابت کنید، مجموعه ی A از عدد های طبیعی وجود دارد، به نحوی که، هر عدد طبیعی که متعلق به A نیست، برابر با میانگین حسابی دو عضو مختلف A باشد و هیچ عضو A، دارای این ویژگی نباشد.
دور نهایی (سال دهم)
۴۵. همان مساله ی ۴۰.
۴۶. ثابت کنید، اگر مجموع زاویه های مسطحه ی راس یک هرم، از ۱۸۰ درجه بیشتر باشد، آن وقت طول هر یال جانبی هرم، از نصف محیط قاعده کمتر است.
۴۷. درباره ی عدد a می دانیم، عدد $3a$ را می توان به صورت x^2+2y^2 نوشت (x و y، عدد هایی درست اند). ثابت کنید، خود عدد a را هم می توان به همین صورت نوشت.
۴۸. همان مساله ی ۳۹.
۴۹. همان مساله ی ۴۳.
۵۰. همان مساله ی ۴۴.
* ۵۱. عدد های درست a، b، c، d، و e چنان اند که

$$a+b+c+d+e \text{ و } a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$$

بر عدد فرد n بخش پذیر اند. ثابت کنید، عدد

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$$

هم، بر عدد n بخش پذیر است.
۵۲. شش عدد نخستینِ دنباله ای چنین است:

$$1,0,1,0,1,0$$

با آغاز از جمله ی هفتم، هر جمله برابر است با آخرین رقم مجموع شش جمله ی پیش از آن. ثابت کنید، در این دنباله، به ردیف شش عدد

$$0,1,0,1,0,1$$

برخورد نمی کنیم.

۱۹۸۵

سال پنجم

۱. ۶۸ سکه به وزن های مختلف داریم. با ۱۰۰ بار استفاده از ترازوی دو کفه ای و بدون استفاده از وزنه، سنگین ترین و سبک ترین سکه را پیدا کنید.

۲. عدد ۴۵ رقمی شامل یک رقم ۱، دو رقم ۲، سه رقم ۳، ...، نه رقم ۹ می باشد. ثابت کنید، این عدد مجذور کامل نیست.

۳. مسافری از شهر زادگاه خود A، به طرف دورترین شهر کشور نسبت به A، یعنی B، حرکت کرد؛ سپس از B به دورترین شهر نسبت به B رفت (شهر C) و غیره. ثابت کنید، اگر C و A دو شهر مختلف باشند، مسافر هرگز به شهر خود نمی رسد.

۴. ۱۰۰۰ عدد طبیعی پیدا کنید که، مجموع آن ها، برابر با حاصل ضرب آن ها باشد.

۵. در انباری ۳۰۰ لنگه چکمه وجود دارد: برای شماره ی ۴۰ پا ۱۰۰ لنگه، برای شماره ی ۴۱ پا ۱۰۰ لنگه و برای شماره ی ۴۲ پا ۱۰۰ لنگه. در ضمن، ۱۵۰ لنگه چکمه برای پای راست و ۱۵۰ تا برای پای چپ است. ثابت کنید، دست کم ۵۰ جفت چکمه می توان از آن ها جدا کرد، به نحوی که هر جفت، شامل یک شماره ی چپ و راست باشد.

۶. همان مساله ی ۱۸، برای $n = ۱۰$.

سال ششم

۷. عدد ۱ را روی تخته ی سیاه نوشته ایم. هر ثانیه، به عددی که روی تخته وجود دارد، مجموع رقم هایش را اضافه می کنیم. آیا ممکن است، بعد از مدتی، عدد ۱۲۳۴۵۶، روی تخته ظاهر شود؟

۸. ارتفاع AK، نیمساز BL و میانه ی CM در مثلث ABC، در نقطه ی O به هم رسیده اند؛ در ضمن $|AO|=|BO|$. ثابت کنید، مثلث ABC، متساوی الاضلاع است.

۹. برای عدد های اول p و q و عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}+\frac{۱}{pq}=\frac{۱}{n}$$

این عدد ها را پیدا کنید.

۱۰. همان مساله ی ۵.

۱۱. سه حشره روی یک خط راست اند. آن ها مرتب از روی یکدیگر می پرند (هر حشره از روی یک حشره و نه از روی دو حشره). آیا ممکن است، بعد از ۱۹۸۵ پرش، در جای اول خود باشند؟

۱۲. همان مساله ی ۱۸ به ازای $n = ۱۰$.

سال هفتم

۱۳. نقطه های P و Q را، به ترتیب، روی ضلع های BC و CD از مربع ABCD، طوری در نظر گرفته ایم که مثلث APQ، متساوی الاضلاع باشد. خط راستی که از نقطه ی P، عمود بر ضلع AQ رسم شده است، AD را در نقطه ی E قطع کرده است. نقطه ی F را در بیرون مثلث APQ طوری انتخاب می کنیم که مثلث های PQF و AQE برابر باشند. ثابت کنید، پاره خط راست FE دو برابر پاره خط راست FC طول دارد.

۱۴. عددی طبیعی را مجذور و، سپس، ۶۰۰ واحد از آن کم کرده ایم. با عددی که به دست می آید، دوباره همین عمل را انجام داده ایم و غیره. عدد نخستین، چه می تواند باشد، به شرطی که، بعد از چند بار انجام این عمل ها، دوباره به همان عدد اصلی رسیده باشیم؟

۱۵. دو نقطه روی ضلع های رو به رو و در مستطیلی انتخاب و آن ها را به راس های مستطیل وصل کرده ایم. ثابت کنید، مساحت های هفت بخشی که به این ترتیب در مستطیل پدیدی می آیند، نمی توانند همگی با هم برابر باشند.

۱۶. حداکثر چند عدد از بین عدد های ۱، ۲، ۳، ...، ۱۹۸۵، می توان انتخاب کرد، به نحوی که تفاضل هیچ دو عدد انتخابی، برابر عددی اول نباشد؟

۱۷. ۱۹۸۵ نقطه به رنگ های قرمز، آبی و سبز، روی صفحه ای قرار دارند، به نحوی که، هیچ سه نقطه ای، روی یک خط راست نیست. برخی از نقطه های نا هم رنگ را، به وسیله ی پاره خط های راست، به هم وصل کرده ایم، در ضمن، معلوم شد، تعداد پاره خط های راستی که از هر نقطه می گذرد، برابر است با تعداد پاره خط های راستی که از هر نقطه ی دیگر می گذرد. ثابت کنید، نقطه ی قرمز رنگی پیدا می شود که هم به نقطه های سبز و هم به نقطه های آبی وصل شده است.

۱۸. روی دو سکو، n صندوق، با شماره های از ۱ تا n، به طور نامنظم و به صورتی دلخواه روی هم چیده شده اند. با جرثقیل می توان، هر بار، چند صندوق را از یک سکو به سکوی دیگر برد. ثابت کنید، با انجام $۲n - ۱$ بار عمل جرثقیل، می توان همه ی صندوق ها را، در یک سکو، به ردیف شماره های آن ها گذاشت.

سال هشتم

۱۹. یک تصاعد حسابی که جمله های آن را عدد های طبیعی تشکیل داده اند، شامل برخی مجذور های کامل است. ثابت کنید، در بین جمله های این تصاعد، بی نهایت مجذور کامل وجود دارد.

۲۰. دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$\begin{cases}(x+y)^{۳}=z\\(y+z)^{۳}=x\\(z+x)^{۳}=y\end{cases}$$

۲۱. در چهارضلعی کوژ ABCD داریم:

$$\widehat{ABD}=۶۵°,\widehat{CBD}=۳۵°,\widehat{ADC}=۱۳۰°,|AB|=|BC|$$

زاویه های داخلی چهارضلعی ABCD را پیدا کنید.

۲۲. درباره ی عدد های مثبت $a_۱$، $b_۱$، $c_۱$، $a_۲$، $b_۲$ و $c_۲$ می دانیم:

$$b_۱^۲ \le a_۱c_۱, b_۲^۲ \le a_۲c_۲$$

ثابت کنید:

$$(a_۱+a_۲+۵)(c_۱+c_۲+۲)>(b_۱+b_۲+۳)^۲$$

۲۳. دایره ی به مرکز O، بر ضلع های زاویه ای، در نقطه های A و B مماس است. از نقطه ی دلخواه M واقع بر پاره خط راست AB (به جز خود نقطه های A و B)، خط راستی عمود بر خط راست OM رسم کرده ایم. این عمود ضلع های زاویه را در نقطه های C و D قطع کرده است. ثابت کنید: $|MC|=|MD|$.

۲۴. یک بازی دو نفره، با مستطیل ۲۵×۱ که شامل ۲۵ خانه ی مربعی است و ۲۵ مهره سروکار دارد. خانه های مستطیل با عدد های از ۱ تا ۲۵، به ردیف شماره گذاری شده اند. هر بازی کن، در نوبت خود، می تواند یا مهره ای را در یک خانه ی آزاد بگذارد و یا مهره ای را که، پیش از آن، در جدول گذاشته شده است، به خانه ی مجاور خود، که شماره ی بالاتری دارد، منتقل کند. در آغاز بازی، همه ی خانه ها آزاد اند. بازی وقتی تمام می شود که، همه ی خانه های جدول، به وسیله ی مهره ها اشغال شده باشند. کسی بازی را می برد که آخرین حرکت را انجام داده باشد. اگر بازی به درستی و اندیشیده انجام شود، کدام یک برنده خواهد شد: آن که بازی را آغاز کرده است یا رقیب او؟

سال نهم

۲۵. در چهارضلعی کوژ ABCD، قطر ها در نقطه ی O به هم رسیده اند و، در ضمن، می دانیم:

$$\widehat{BAC}=\widehat{CBD},\widehat{BCA}=\widehat{CDB}$$

ثابت کنید، مماس هایی که از نقطه های B و C بر دایره ی (AOD) رسم شوند، طولی برابر دارند.

۲۶. عدد های حقیقی a، b، c، x، y، و z چنان اند که

$$x=by+cz, y=cz+ax, z=ax+by$$

در ضمن، دست کم یکی از عدد های x، y، و z مخالف صفر است. ثابت کنید:

$$۲abc+ab+ac+bc=۱$$

۲۷. طول هر ضلع چهارضلعی کوژ، از ۷ تجاوز نمی کند. ثابت کنید، چهار دایره ی با شعاع برابر ۵ و مرکز های واقع در راس های چهارضلعی، به طور کامل، چهارضلعی را می پوشانند.

۲۸. درباره ی عدد های حقیقی a، b، و c می دانیم:

$$a+b+c>۰,ab+ac+bc>۰,abc>۰$$

ثابت کنید، هر سه عدد a، b، و c مثبت اند.

* ۲۹. دنباله ی عدد های $x_۱$، $x_۲$، ...، با این شرط ها داده شده است:

$$x_۱=۰/۰۰۱, x_{n+۱}=x_n-x_n^۲$$

ثابت کنید: $x_{۱۰۰۱}<۰/۰۰۰۵$.

۳۰. همان مساله ی ۲۴.

سال دهم

۳۱. درباره ی عدد های حقیقی a، b، c، x، y و z می دانیم:

$$a^x=bc,b^y=ac,c^z=ab$$

در ضمن، عدد های a، b و c مثبت اند و، دست کم یکی از آن ها، برابر واحد نیست. ثابت کنید $x+y+z-xyz$، عددی درست است.

۳۲. مساله ی ۲۳ را ببینید.

۳۳. خط های راستی که از مرکز دایره ی محاطی هر وجه چهاروجهی، عمود بر آن وجه رسم کرده ایم، در یک نقطه به هم رسیده اند. ثابت کنید، مجموع طول های هر دو یال متقابل چهاروجهی، مقدار ثابتی است.

۳۴. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$۹ < \int_{۰}^{۳} \sqrt[۴]{x^{۴}+۱}dx + \int_{۱}^{۳} \sqrt[۴]{x^{۴}-۱}dx < ۹/۰۰۰۱$$

۳۵. همان مساله ی ۲۹.
۳۶. همان مساله ی ۲۴.
دور نهایی (سال هشتم)
۳۷. عدد ۱۵۸۴ دارای این ویژگی ها است.
الف) مجذور یک عدد درست نیست؛
ب) با مقلوب خود، یعنی ۴۸۵۱ فرق دارد،
ج) حاصل ضرب دو عدد ۱۵۸۴ و ۴۸۵۱، مجذور کامل است.
عددی ۲۰ رقمی پیدا کنید که همین ویژگی ها را داشته باشد.
۳۸. محیط مثلثی برابر ۱۰۰ سانتی متر و مساحت آن برابر ۱۰۰ سانتی متر مربع است. خط های راستی موازی با ضلع ها و به فاصله ی یک سانتیمتر از آن ها رسم کرده ایم؛ این خط های راست، مثلث را به ۷ بخش تقسیم می کنند که سه تا از آن ها، متوازی الاضلاع اند. ثابت کنید، مجموع مساحت های این سه متوازی الاضلاع، از ۲۵ سانتیمتر مربع کمتر است.
۳۹. ۱۵ تیم والیبال، در یک مسابقه، با هم بازی می کنند؛ هر تیم یک دور بازی با هر تیم دیگر. معلوم شد، هر تیم در هفت بازی برنده شده است. چند گروه شامل سه تیم می توان پیدا کرد، به نحوی که در هر گروه، هر تیم یکبار برنده شده باشد؟
۴۰. خانه های صفحه ی شطرنجی ۱۰۰×۱۰۰ را با چهار رنگ، طوری رنگ کرده ایم که، در هر مربع ۲×۲، هر چهار رنگ وجود داشته باشد. ثابت کنید، خانه های چهار گوشه ی صفحه، از چهار رنگ اند.
۴۱. ذوزنقه ی با قاعده های به طول های a و b بر دایره ای به شعاع R محیط شده است. ثابت کنید: $ab \geq ۴R^{۲}$.
۴۲. دنباله ی عدد های طبیعی $a_{۱}$، $a_{۲}$، ...، دو جمله ی اول برابر ۱، و هر یک از بقیه ی جمله ها برابر مجموع دو جمله ی قبل از خود است. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{a_{۱}a_{۳}} + \frac{۱}{a_{۲}a_{۴}} + \frac{۱}{a_{۳}a_{۵}} + \cdots + \frac{۱}{a_{۹۹}a_{۱۰۰}} < ۱$$

۴۴. هر عدد طبیعی $k \leq ۱۰۰$ را با عدد طبیعی $f(k)$، که باز هم از ۱۰۰ تجاوز نمی کند، متناظر کرده ایم و، سپس، این دنباله را ساخته ایم:

$$a_{۱} = a, a_{۲} = f(a_{۱}), a_{۳} = f(a_{۲}), \cdots$$

ثابت کنید، عدد $n \leq ۱۰۰$ پیدا می شود، به نحوی که، برای آن، داشته باشیم: $a_{n} = a_{۲n}$.
دور نهایی (سال های نهم و دهم)
۴۵. همان مساله ی ۳۸.
۴۶. همان مساله ی ۴۰.
۴۷. ۲۰ تیم والیبال با هم مسابقه دادند؛ هر دو تیم، یکبار با هم بازی کردند. فرض کنید، در بین تیم ها، بتوان T گروه سه تیمی پیدا کرد، به نحوی که در هر گروه، هر تیم، یکبار برده باشد. ثابت کنید:
الف) اگر هر تیم کمتر از ۹ برد و بیشتر از ۱۰ برد نداشته باشد، آن وقت $T = ۳۳۰$.
ب) $T \leq ۳۳۰$
۴۸. همان مساله ی ۴۱.
۴۹. همان مساله ی ۴۲.
۵۰. همان مساله ی ۴۳.
۵۱. برای دنباله ی $a_{۱}$، $a_{۲}$، ...، از عدد های طبیعی می دانیم:

$$a_{n+۲} = a_{n+۱}a_{n} + ۱$$

(به ازای هر n). ثابت کنید، برای هر $n > ۱۰$، عدد $(a_{n} - ۲۲)$، عددی مرکب است.
۵۲. تعداد پسران یک کلاس، با تعداد دختران آن برابر است. هر پسر با تعداد زوجی از دختران دوستی دارد. ثابت کنید، می توان گروهی از چند پسر را طوری انتخاب کرد که، هر دختر، با تعداد زوجی از پسران این گروه، دوستی داشته باشد.

۱۹۸۶

سال پنجم
۱. ۹ «کارت» که روی هر یک، عددی نوشته شده است، این طور در ردیف هم قرار دارند.
۷،۸،۹،۴،۵،۶،۱،۲،۳
در هر حرکت می توانیم چند کارت ردیف را برداریم و آن ها را به ردیف عکس بچینیم. چگونه می توان با سه حرکت، به ردیف زیر رسید:
۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹

۲. ۴۴ وزیر روی صفحه ی شطرنج است. ثابت کنید، هر کدام از آن ها می تواند یکی دیگر را بزند.
۳. برای عدد های طبیعی a و b می دانیم:

$$۳۴a = ۴۳b$$

ثابت کنید، $a+b$، عددی مرکب است.
۴. چند سکه ی مساوی را، چگونه روی صفحه ی میز بگذاریم که، هر یک از آن ها، بر ۳ سکه ی دیگر مماس باشد؟
۵. ۵۵ عدد روی محیط دایره اند و، هر عدد، برابر است با مجموع دو عدد مجاور خود. ثابت کنید، همه ی عدد ها برابر صفر اند.
۶. الف) عدد هفت رقمی پیدا کنید که رقم های تکراری نداشته باشد و خود عدد بر هر یک از رقم هایش بخش پذیر باشد.
ب) آیا عدد هشت رقمی با این ویژگی وجود دارد؟
سال ششم
۷. همان مساله ی ۱.
۸. همان مساله ی ۲.
۹. در شش ضلعی ABCDEF، مثلث های ABC، ABF، FEA، FED، DCB، CDE، با هم برابر اند. ثابت کنید، قطر های AD، BE و CF، طولی برابر دارند.
۱۰. همان مساله ی ۵.
۱۱. حلزون، با سرعتی ثابت، از مبدا مختصات آغاز به حرکت کرد. او بعد از هر نیم ساعت به اندازه ی ۶۰ درجه می چرخد. ثابت کنید، برای این که دوباره به مبداء مختصات برسد، به تعداد درستی ساعت نیاز دارد.
۱۲. همان مساله ی ۶.
۱۳. ۱۱ دانش آموز در پنج انجمن علمی شرکت می کنند. ثابت کنید، می توان دو دانش آموز A و B پیدا کرد، به نحوی که هر انجمن مورد علاقه ی A، مورد علاقه ی B هم باشد.
سال هفتم
۱۴. همان مساله ی ۵.
۱۵. برای عدد های طبیعی a، b، و c، داریم:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}<۱$$

ثابت کنید: $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}<\frac{۴۱}{۴۲}$.۱۶. در مثلث متساوی الساقین ABC، زاویه ی راس B برابر ۱۰۸ درجه است. نیمساز زاویه ی ACB، ضلع AB را در D قطع کرده است. عمود بر این نیمساز در نقطه ی D، قاعده ی AC را در نقطه ی E قطع کرده است. ثابت کنید: $|AE|=|BD|$.
۱۷. همان مساله ی ۶.
۱۸. نقطه های K و H را روی ضلع های BC و CD از مربع ABCD طوری انتخاب کرده ایم که

$$|KC|=۲|KB| \quad \text{و} \quad |HC|=|HD|$$

برابری دو زاویه ی AKB و AKH را ثابت کنید.
۱۹. توده ای شامل ۲۵ چوب کبریت داریم. آن را، به صورتی دلخواه به دو بخش تقسیم می کنیم؛ سپس، هر بخش را، دوباره، به دو بخش دیگر تقسیم می کنیم تا جایی که در هر بخش تنها یک چوب کبریت باشد. هر وقت عمل بخش را انجام می دهیم، تعداد چوب کبریت های دو بخش را در هم ضرب می کنیم و، در جایی، می نویسیم. ثابت کنید، مجموع همه ی عددهایی که نوشته ایم، برابر است با ۳۰۰.
سال هشتم
۲۰. همه ی عدد های سه رقمی را پیدا کنید که، هر یک از آن ها، ۱۱ برابر مجموع رقم هایش باشد.
۲۱. نقطه ی E را روی ضلع BC، نقطه های K و M را روی ضلع CD و نقطه ی H را روی ضلع AD از مربع ABCD انتخاب کرده ایم. در ضمن می دانیم:

$$|CE|=|CK| \quad \text{و} \quad |DM|=|DH|$$

ثابت کنید، بر چهار ضلعی که از برخورد زاویه های HBM و EAK به دست می آید، می توان دایره ای محیط کرد.
۲۲. عدد های درست a و b را پیدا کنید، به شرطی که

$$\frac{a}{۹۹۹}+\frac{b}{۱۰۰۱}=\frac{۱}{۹۹۹۹۹۹}$$

۲۳. نقطه های H، I، K، M و O را، به ترتیب وسط ضلع های AB، BC، CD، DE و EA از پنج ضلعی ABCDE انتخاب کرده ایم. ثابت کنید، طول خط شکسته ی HKOIMH از طول خط شکسته ی ACEBDA کمتر است.
۲۴. سه جمله ای ها درجه ی دوم

$$x^{2}+b_{1}x+c_{1} \text{ و } x^{2}+b_{2}x+c_{2}$$
ضریب هایی صحیح و ریشه ی مشترکی نادرست دارند. ثابت کنید، این دو سه جمله ای، بر هم منطبق اند، یعنی $b_1=b_2$ و $c_1=c_2$.

* ۲۵. ۲۰۰ تیم فوتبال مسابقه می دهند. روز اول، هر تیم، یک بازی، روز دوم هم، هر تیم، یک بازی داشت و غیره. ثابت کنید، بعد از روز ششم، می توان ۳۴ تیم پیدا کرد که، هیچ دو تایی از آن ها، با هم بازی نکرده اند.

سال نهم

۲۶. همان مساله ی ۲۰.

۲۷. همان مساله ی ۲۱.

۲۸. این دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$\begin{cases} a=bcd \\ a+b=cd \\ a+b+c=d \\ a+b+c+d=1 \end{cases}$$

۲۹. روی ضلع های مثلث ABC، متوازی الاضلاع های $AA'B''B$ ، $BB'C'C''$ ، $CC'A''A$ را ساخته ایم؛ در ضمن، طول ضلع های جانبی متوازی الاضلاع ها با هم برابرند:

$$|AA'|=|BB'|=|CC'|=a$$

مقدار a را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم:

$$|A'A''|=3,|B'B''|=4,|C'C''|=5$$

۳۰. همان مساله ی ۲۴.

۳۱. عدد های درست a، b، و c را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\frac{a}{999}+\frac{b}{1000}+\frac{c}{1001}=\frac{1}{999\times 1000\times 1001}$$

سال دهم

۳۲. همان مساله ی ۲۰.

۳۳. همان مساله ی ۲۱.

۳۴. برای دو عدد مثبت a و b می دانیم: $ab=a+b$. کمترین مقدار حاصل ضرب ab چقدر است؟

۳۵. همه ی ریشه های مثبت این معادله را پیدا کنید:

$$x^{1986}+1986^{1985}=x^{1985}+1986^{1986}$$

۳۶. همان مساله ی ۳۱.

۳۷. مطلوب است زاویه ی بین یال AB و وجه ACD در کنج سه وجهی ABCD به راس A، به شرطی که

$$\widehat{BAC}=45^\circ,\widehat{CAD}=90^\circ,\widehat{BAD}=60^\circ$$

دور نهایی (سال هشتم)

۳۸. $a_1=2$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n+1$$

ثابت کنید: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<1$.

۳۹. ثابت کنید، در هر چندضلعی، ضلع BC و راس A (غیر از دو راس B و C) پیدا می شود که، اگر از نقطه ی A بر خط راست BC عمود کنیم، پای عمود روی ضلع BC قرار گیرد.

۴۰. مریخی، در نیمه ی شب متولد می شود و درست ۱۰۰ شبانه روز زندگی می کند. می دانیم، در طول تاریخ تمدن مریخ، روی هم به تعداد فرد مریخی به دنیا آمده است. ثابت کنید، دست کم، ۱۰۰ روز وجود دارد که، تعداد ساکنان مریخ در هر یک از آن ها، عددی فرد بوده است.

۴۱. مربع ABCD مفروض است. روی ضلع AB، نقطه ی K، روی ضلع CD، نقطه ی H و روی پاره خط راست KH، نقطه ی M را انتخاب کرده ایم. دایره های محیطی مثلث های AKM و MHC را رسم کرده ایم. ثابت کنید، نقطه ی دوم برخورد این دایره ها (غیر از نقطه ی M)، روی قطر AC از مربع قرار دارد.

* ۴۲. در کشوری، یکی از خط های هوایی یکسره را تعطیل کردند. معلوم شد، با وجود این، می توان از هر مرکز هوایی کشور، به هر مرکز دیگر، ولو با تعویض هواپیما، پرواز کرد. قبل از بسته شدن این خط، می شد هر پرواز هوایی را، از

هر مرکز به هر مرکز دیگر، حداکثر با n بار فرود هواپیما انجام داد. ثابت کنید، اکنون می توان سفر هوایی را از هر مرکز به هر مرکز دیگر، انجام داد. ثابت کنید، اکنون می توان سفر هوایی را از هر مرکز به هر مرکز دیگر، حداکثر با $2n$ مرتبه فرود هواپیما انجام داد (برای محاسبه، فرود در مقصد را هم به حساب بیاورید).

۴۳. دنباله ای شامل ۳۶ جمله، از صفر ها و واحد ها، با پنج صفر آغاز شده است. جمله های بعدی دنباله چنان اند که، هر یک از ۳۲ ترکیب ممکن را، می توان بین پنج جمله ی پشت سر هم دنباله پیدا کرد. پنج جمله ی آخر دنباله را پیدا کنید.

* ۴۴. ثابت کنید، می توان روی صفحه چند خط راست رسم کرد و چند نقطه را چنان نشان گذاشت که، روی هر خط راست، درست چهار نقطه ی نشان داد وجود داشته باشد و از هر نقطه ی نشان دار، درست چهار خط راست گذشته باشد.

* ۴۵. صفحه ی کاغذ شطرنجی، شامل ۴۵×۳۰ خانه در دسترس است. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می کنند: در هر حرکت (که به نوبت انجام می گیرد)، روی خط راستی که دو گره مجاور شبکه را به هم وصل می کند، می بُرند. نفر اول، بریدن را از کنار صفحه آغاز می کند؛ سپس، هر بازی کن در نوبت خود، باید برش بعدی را، به دنبال برش قبلی و از جایی ادامه دهد که برش نفر قبل تمام شده است. کسی بازی را می برد که، بعد از حرکت او، صفحه ی شطرنجی کاغذ، به دو بخش تقسیم شده باشد. به شرط بازی درست، کدام برنده می شود، آن که بازی را آغاز کرده است، یا رقیب او؟

دور نهایی (سال نهم)

۴۶. همان مساله ی ۳۸.

۴۷. همان مساله ی ۳۹.

۴۸. همان مساله ی ۴۰.

۴۹. همان مساله ی ۴۱.

۵۰. عضو های مجموعه ی A، عدد هایی مثبت اند. می دانیم، مجموع هر دو عضو دلخواه از A، خود عضوی از A است و، در ضمن، هر بازه ی [a,b] ($۰ < a < b$)، شامل بازه ای است که به طور کامل از عضو های مجموعه ی A تشکیل شده است. ثابت کنید، مجموعه ی A، از همه ی عدد های مثبت حقیقی تشکیل شده است.

۵۱. به این الگوریتم توجه کنید:

گام ۰. n=m می گیریم.

گام ۱. اگر n عددی زوج باشد، آن را نصف و، اگر فرد باشد، یک واحد به آن اضافه می کنیم.

گام ۲. اگر $n > ۱$، همان گام اول را بر می داریم و اگر $n = ۱$، الگوریتم تمام می شود.

چند عدد طبیعی m وجود دارد که، به ازای هر یک از آن ها، برای انجام این الگوریتم، درست ۱۵ بار از گام اول لازم باشد؟

۵۲. همان مساله ی ۴۴.

* ۵۳. مهره ی شاه، صفحه ی شطرنجی ۹×۹ را می پیماید، به نحوی که، در هر خانه، درست یک بار باشد. مسیر حرکت شاه، مسیری بسته نیست و می تواند خودش را قطع کرده باشد. حداکثر طول مسیر حرکت شاه چقدر است، به شرطی که حرکت در طول قطر برابر $\sqrt{۲}$ و حرکت قائم یا افقی برابر ۱ باشد.

دور نهایی (سال دهم)

۵۴. قطر یک مجموعه، به بزرگترین فاصله ی بین دو نقطه ی آن گفته می شود (اگر چنین فاصله ای وجود داشته باشد). می دانیم، مجموع قطر های چندضلعی های $M_۱$، $M_۲$، ...، M_n، از قطر اجتماع آن ها کمتر است.

ثابت کنید، خط راستی وجود دارد که هیچ کدام از چندضلعی ها را قطع نمی کند و، در هر سمت ان، دست کم یکی از چندضلعی ها قرار دارد.

۵۵. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. می دانیم، برای هر عدد حقیقی x، عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که

$$\underbrace{f\left(f\left(\cdots f\left(x\right)\cdots\right)\right)}_{\text{بار } n}=۱$$

ثابت کنید: $f(۱)=۱$.

۵۶. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۵}+\sqrt{۷}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۹۹۹۷}+\sqrt{۹۹۹۹}}>۲۴$$

۵۷. در متوازی الاضلاع ABCD (که لوزی نیست)، نیمساز زاویه ی BAD را رسم کرده ایم که، خط های راست BC و CD را، به ترتیب، در نقطه های X و Y قطع کرده است. ثابت کنید، مرکز دایره ای که از نقطه های C، X و Y می گذرد، روی محیط دایره ای قرار دارد که از نقطه های B و C و D گذشته است.

۵۸. این انتگرال را محاسبه کنید:

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{۱+x^{۳}+\sqrt{۱+x^{۶}}}$$

* ۵۹. ثابت کنید، می توان چند دایره را روی صفحه چنان رسم کرد که نقطه ی برخورد درونی نداشته باشند و، هر یک از آن ها، درست بر پنج دایره ی دیگر مماس باشد.

۶۰. برای عدد های حقیقی a، b، c، x، y و z می دانیم:

$$u_1 = ax + by + cz\,,\ v_1 = ax + bz + cy\,,$$
$$u_2 = ay + bz + cx\,,\ v_1 = az + by + cx\,,$$
$$u_3 = az + bx + cy\,,\ v_3 = ay + bx + cz$$
$$u_1 u_2 u_3 = v_1 v_2 v_3$$

ثابت کنید، مجموعه ی $\{u_1, u_2, u_3\}$ با مجموعه ی $\{v_1, v_2, v_3\}$ برابر است.

* ۶۱. همان مساله ی ۴۵، برای صفحه ی شطرنجی ۳۰×۳۰.

۱۹۸۷

سال پنجم

۱. در خانه های یک جدول ۴×۴، عدد های از ۱ تا ۱۶ را، آن طور که در شکل a – ۱۴ دیده می شود، نوشته ایم. می توانیم بنابر قاعده ی زیر، عدد های این جدول را عوض کنیم:

به همه ی عدد های یک سطر، یک واحد اضافه، یا از همه ی عدد های یک ستون، یک واحد کم کنیم. چگونه می توان، با این عمل ها، به جدول شکل b – ۱۴ رسید؟

a)

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶

b)

۱	۵	۹	۱۳
۲	۶	۱۰	۱۴
۳	۷	۱۱	۱۵
۴	۸	۱۲	۱۶

شکل ۱۴

۲. در کشوری، چهار نوع اسکناس وجود دارد: ۱ دلاری، ۱۰ دلاری، ۱۰۰ دلاری و ۱۰۰۰ دلاری. آیا می توان نیم میلیون عدد اسکناس به ارزش یک میلیون دلار جدا کرد؟

۳. می خواهیم شش قلعه را، به وسیله ی جاده، طوری به هم مربوط کنیم که، هر دو قلعه ی دلخواه، به هم مربوط باشند. طرحی از قلعه ها و جاده ها رسم کنید که تنها سه چهارراه وجود داشته باشد و، در ضمن، هر جاده به وسیله ی دو جاده ی دیگر قطع شده باشد.

۴. پسر ها هر کدام یک پیراشکی و دختر ها هر کدام یک شکلات خریدند و مبلغی پرداختند. ولی اگر پسر ها شکلات و دختر ها پیراشکی می خریدند، روی هم یک کوپک بیشتر می پرداختند. می دانیم، تعداد پسر ها از تعداد دختر ها بیشتر است. چند تا؟

۵. چند بلیت اتوبوس باید تهیه کرد تا در بین آن ها، بلیتی با شماره ی شانس وجود داشته باشد؟ بلیتی را شانس به حساب می آورند که مجموع سه رقم اول با مجموع سه رقم آخر آن، با هم برابر باشند. تعداد بلیت ها، محدود نیست.

۶. دو نفر « خط و نقطه » بازی می کنند، در یک جدول شامل ۹×۹ خانه. اولی در یکی از خانه ها خط و، سپس، دومی در یک خانه ی آزاد، نقطه می گذارد. بعد از پر شدن جدول، برای هر سطر یا هر ستونی که تعداد خط های بیشتری دارد، یک امتیاز به اولی، و برای هر سطر یا ستونی که تعداد خانه های بیشتری دارد، یک امتیاز به دومی داده می شود. اولی چگونه می تواند برنده شود (امتیاز بیشتری بیاورد)؟

سال ششم

۷. همان مساله ی ۱.

۸. در مثلث متساوی الساقین ABC، ارتفاع CH و میانه ی BK را رسم کرده ایم. می دانیم:

$$|CH| = |BK|\ \widehat{KBC} = \widehat{HCB}$$

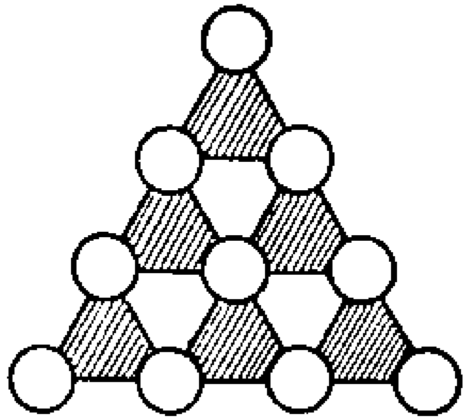
ثابت کنید، مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

۹. همان مساله ی ۴.

۱۰. واحد پول در کشور های «دالری» و «دیلری» به ترتیب «دالر» و «دیلر» است؛ در ضمن در «دالری»، هر «دالر» با ۱۰ «دیلر» معاوضه می شود، ولی در «دیلری» هر «دیلر» با ۱۰ «دالر». کسی یک «دیلر» دارد و می تواند آزادانه به هر یک از دو کشور مسافرت کند و پول خودش را معاوضه کند. ثابت کنید، هرگز مقدار «دالر ها» با مقدار «دیلر ها» برابر نمی شود.

۱۱. همان مساله ی ۵.

۱۲. آیا می توان عدد های از ۰ تا ۹ را (هر کدام یک بار) در دایره های شکل ۱۵، طوری قرار داد که، مجموع عدد های سه راس هر مثلث هاشور خورده با مجموع عدد های سه راس هر مثلث هاشور خورده ی دیگر، برابر باشد؟



شکل ۱۵

سال هفتم

۱۳. پاره خط های راستی که وسط ضلع های رو به رو را در چهارضلعی کوژ ABCD به هم وصل کرده اند، چهارضلعی اصلی را به چهار چهارضلعی دیگر تقسیم کرده اند که محیطی برابر دارند. ثابت کنید، ABCD یک متوازی الاضلاع است.

۱۴. همان مساله ی ۴.

۱۵. همان مساله ی ۱۰.

۱۶. راس های خط شکسته ی بسته ای که خودش را قطع نکرده است و دارای هشت ضلع است، راس های یک مکعب اند. ثابت کنید، یکی از ضلع های این خط شکسته، بر یکی از یال های مکعب منطبق است.

۱۷. شرکت ساختمانی - تعمیرات «ماسه»، ساختن جاده ای به طول ۱۰۰ کیلومتر از «آرباتوف» تا «چرنومور» را به عهده گرفت. برنامه ای که شرکت برای ساختن جاده در نظر گرفته است، چنین است: در ماه اول یک کیلومتر آن را آماده می کند و، سپس اگر در آغاز ماه a کیلومتر جاده ساخته شده است، ضمن آن ماه $\frac{۱}{a^{۱۰}}$ کیلومتر از جاده آماده می شود. آیا هرگز تمام جاده، آماده ی بهره برداری می شود؟

۱۸. ابزاری برای رسم شکل ها در صفحه در اختیار داریم که، به کمک آن، می توان

الف) از دو نقطه ی مفروض، خط راستی عبور داد؛

ب) از یک نقطه ی مفروضِ واقع بر یک خط راست، عمودی بر خط راست اخراج کرد.

اکنون، اگر نقطه ای در بیرون خط راست باشد، چگونه می توان با این وسیله، عمودی از این نقطه بر خط راست فرود آورد؟

سال هشتم

۱۹. روی خانه های یک صفحه ی شطرنجی ۱۰ × ۱۰، ۵۰ مهره گذاشته شده است: ۲۵ مهره در یک چهارم گوشه ی چپ و پایین صفحه و ۲۵ مهره در یک چهارم گوشه ی راست و بالای آن. با هر حرکت، یک مهره می تواند از روی مهره ی مجاور خود بپرد و در خانه ی آزادی که در ردیف افقی، عمودی و یا قطری آن ها است، قرار گیرد. آیا با تکرار این حرکت، می توان همه ی مهره ها را در خانه های نیمه ی چپ صفحه قرار داد؟

۲۰. به تعداد کافی، سکه های ۱، ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، و ۵۰ کوپکی و همچنین سکه های ۱ روبلی در اختیار داریم (هر روبل برابر ۱۰۰ کوپک است). می دانیم a کوپک را می توان با b سکه انتخاب کرد. ثابت کنید، در این صورت، b روبل را می توان با a سکه، به دست آورد.

۲۱. a، b، c، و d، چهار عدد حقیقی دلخواه اند. ثابت کنید:

$$(۱+ab)^۲+(۱+cd)^۲+(ac)^۲+(bd)^۲ \geq ۱$$

۲۲. مثلث ABC مفروض است. نقطه های $A_۱$ و $A_۲$، ضلع AC را و نقطه های $B_۱$ و $B_۲$، ضلع BC را به سه بخش برابر تقسیم می کنند. ثابت کنید، اگر دو زاویه ی $A_۱BA_۲$ و $B_۱AB_۲$ برابر باشند، آن وقت مثلث ABC، متساوی الساقین است.

۲۳. روی شاخه های یک چنار بزرگ، چند کلاغ نشسته اند. با علامت، آن ها جای خود را با هم عوض می کنند. هر دقیقه، یکی از کلاغ ها، همسایه ی خود را که روی همان شاخه نشسته است، بیرون می کند و این کلاغ به شاخه ی بالاتر می رود؛ اگر شاخه ی بالاتری وجود نداشته باشد، کلاغ به پرواز در می آید. همه ی شاخه ها در ارتفاع های مختلفی قرار دارند. ثابت کنید، مدت زمانی که برای به پایان رسیدن این جریان لازم است (یعنی وقتی که روی هر شاخه، تنها یک کلاغ نشسته باشد)، به ردیف پرواز ها بستگی ندارد، بلکه تنها به وضع استقرار کلاغ ها در آغاز، بستگی دارد.

۲۴. ۶۴ مکعب کوچک را به صورت مربع ۸×۸ چیده ایم. آیا می توان همین مکعب های کوچک را به صورت یک مکعب ۴×۴×۴ طوری چید که مکعب های مجاور، در وضع جدید هم، مجاور یکدیگر باشند؟

سال نهم

۲۵. خانه های جدول ۸×۸، شبیه صفحه ی شطرنج به رنگ های سیاه و سفید اند. می توانیم جای هر دو ردیف افقی یا هر دو ردیف قائم را با هم عوض کنیم. آیا می توان با تکرار این عمل، به جدولی رسید که تمامی نیمه ی سمت چپ آن شامل خانه های سیاه و تمامی نیمه ی سمت راست آن، شامل خانه های سفید باشد؟

۲۶. حاصل این کسر را محاسبه کنید:

$$\cfrac{۱}{۲-\cfrac{۱}{۲-\cfrac{۱}{۲-\cfrac{۱}{۲-\cdots}}}}$$

(روی هم، در این کسر، ۱۰۰ بار از عدد ۲ استفاده شده است).

۲۷. دو دایره، در نقطه های A و B، یکدیگر را قطع کرده اند. مماس های بر دایره ها در نقطه های A و B، بر هم عمودند. M را نقطه ای واقع بر محیط یکی از دایره ها می گیریم، به نحوی که در درون دایره ی دیگر قرار گرفته باشد. AM و BM را از طرف M امتداد می دهیم تا محیط دایره ای را که M در درون آن است، در نقطه های X و Y قطع کنند. ثابت کنید XY، قطری از این دایره است.

۲۸. همان مساله ی ۲۱.

۲۹. بزرگترین عدد طبیعی را پیدا کنید که هر رقم آن، به جز دو رقم اول و آخر، از واسطه ی حسابی دو رقم مجاور خود کوچکتر باشد.

۳۰. اخترشناس ۵۰ ستاره در آسمان مشاهده کرد و، ضمن محاسبه، متوجه شد، مجموع فاصله های دو به دو ی این ستارگان، برابر S است. ابر روی ۲۵ ستاره را پوشاند. ثابت کنید، مجموع فاصله های دو به دوی ۲۵ ستاره ای که دیده می شوند، از $\frac{۱}{۲}S$ کمتر است.

سال دهم

۳۱. همان مساله ی ۲۰.

۳۲. همان مساله ی ۲۶.

۳۳. همان مساله ی ۲۷.

۳۴. همان مساله ی ۲۱.

۳۵. آیا عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که $n^n+(n+۱)^n$ بر ۱۹۸۷ بخش پذیر باشد؟

۳۶. همان مساله ی ۳۰.

دور نهایی (سال هشتم)

۳۷. در مثلث ABC، هر سه زاویه حاده اند. زاویه ی B برابر ۶۰ درجه است و ارتفاع های CE و AD یکدیگر را، در نقطه ی O قطع کرده اند. ثابت کنید، مرکز دایره ی محیطی مثلث ABC، روی نیمساز مشترک دو زاویه ی AOE و COD قرار دارد.

۳۸. عدد های مثبت a، b، c، و d مفروض اند. ثابت کنید، به شرط $ad=۱$، در فاصله ی از ab تا $(a+c)(b+d)$، دست کم مجذور یک عدد درست وجود دارد.

۳۹. روی تخته ی سیاه، این شکل، برای بازی با رقم ها، رسم شده است:

$$\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(*\_\right)*\_\right)*\_\right)*\_\right)*\_\right)*\_\right)*\_\right)*\_\right)*\_\right)$$

دو نفر بازی می کنند. حرکت ها به نوبت انجام می گیرد. نفر اول، بازی را آغاز می کند و، در نخستین حرکت خود، رقمی را در نخستین جای خالی (در سمت چپ) می نویسد. در هر حرکت بعدی، باید رقمی در جای خالی بعد نوشته و، به جای علامت ستاره ی سمت چپ آن، یکی از دو علامت جمع یا ضرب گذاشته شود. در ضمن، یک رقم را نمی توان دو بار نوشت. در پایان بازی، مقدار عبارتی که به دست می آید، محاسبه می شود. اگر حاصل این عبارت، عددی زوج باشد، نفر اول برده است، و اگر عددی فرد باشد، پیروزی با نفر دوم است. اگر هر دو نفر، درست بازی کنند، چه کسی برنده می شود؟

۴۰. در شهری، تنها می توانند آپارتمان ها را با هم مبادله کنند (ولی حق تقسیم آن ها را ندارند). دو خانواده ای که آپارتمان های خود را عوض کرده اند، حق ندارند در همان روز، به مبادله ی دیگری بپردازند. ثابت کنید، هر مبادله ی آپارتمان ها را، هر قدر بغرنج باشد، می توان در دو روز به انجام رساند.

۴۱. برای شش ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$، نقطه ی O وجود دارد، به نحوی که همه ی ضلع های شش ضلعی، از آن جا با زاویه ی ۶۰ درجه دیده می شوند. ثابت کنید اگر داشته باشیم:

$$|OA_1| > |OA_3| > |OA_5|,$$
$$|OA_2| > |OA_4| > |OA_6|$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$|A_1A_2| + |A_3A_4| + |A_5A_6| < |A_2A_3| + |A_4A_5| + |A_6A_1|$$

۴۲. این عدد را به ضرب عامل های اول تجزیه کنید:

$$۹۸۹ \times ۱۰۰۱ \times ۱۰۰۷ + ۳۲۰$$

* ۴۳. صفحه را به چند دایره تقسیم کرده ایم که، در بین آن ها، دایره های متقاطع هم وجود دارد، ولی یکی در درون دیگری نیست. ثابت کنید، قطعه هایی را که، به این ترتیب، از کاغذ جدا شده اند، نمی توان به صورت چند دایره ی غیر متقاطع درآورد.